第 36 講　総合問題(4)

1　xy 平面上で不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{1}{2} \leqq \sin(x+y) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を同時に満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を領域 D とする．

(1)　領域 D の面積を求めよ．

(2)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D の中を動くとき，

$$3\sin^2\left(\frac{x}{2}+y\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}+y\right)+\sqrt{3}\sin(x+2y)+2$$ の最大値と最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　$a>1$ のとき，x についての不等式 $2a^{3x+1}-a^{2x+2}-2a^{2x}+a^{x+1}\leqq 0$ を解け.

[2]　$a>0$，$a\neq 1$ のとき　$\log_a\{1-(a-1)a^x\}\leqq 2x+1$ を満たす x の値の範囲を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　x の方程式　$|\log_{10}x|=px+q$　……①（p，q は実数）が３つの相異なる正の解をもち，次の２つの条件を満たすとする．

（i）３つの解の比は $1:2:3$ である．

（ii）３つの解のうち最小のものは $\frac{1}{2}$ より大きく１より小さい．

このとき，$A=\log_{10}2$，$B=\log_{10}3$ とおき，p と q を A と B を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 36 講　総合問題(4)

$0<a<1$ のとき　x についての方程式

$$\log_2(8ax-1)+\frac{\log_a(x-a)}{\log_a 2}+1=\log_2 2a \quad \cdots\cdots①$$

の解 x を求める．①の真数条件より $x>\frac{1}{8a}$　かつ　$x>a$　$\cdots\cdots$②　である．

$\frac{\log_a(x-a)}{\log_a 2}=\log_{\boxed{ア}}(x-\boxed{イ})$，　$\log_2 2a=\boxed{ウ}+\log_2\boxed{エ}$　より

①は　$x\{\boxed{オ}ax-(\boxed{カ}a^2+1)\}=0$　と変形できる．

②かつ $0<a<1$ より　$x\neq 0$　であるから　$x=\frac{\boxed{カ}a^2+1}{\boxed{オ}a}$　であり，これは②を満たす．

ここで　$x=\boxed{キ}+\frac{1}{\boxed{ク}a}$　と変形できることにより，x は $a=\frac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}$ のとき最小値 $\frac{1}{\sqrt{\boxed{サ}}}$ をとる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 36 講　総合問題(4)

1　xy 平面上で不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{1}{2} \leqq \sin(x+y) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を同時に満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を領域 D とする．

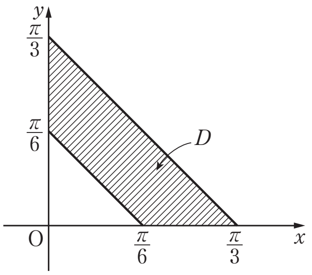
(1)　領域 D の面積を求めよ．

(2)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D の中を動くとき，

$3\sin^2\left(\dfrac{x}{2}+y\right)+\cos^2\left(\dfrac{x}{2}+y\right)+\sqrt{3}\sin(x+2y)+2$ の最大値と最小値を求めよ．

(1)　$\dfrac{1}{2} \leqq \sin(x+y) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$0 \leqq x+y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より　$\dfrac{\pi}{6} \leqq x+y \leqq \dfrac{\pi}{3}$

これと $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ より，領域 D は右図斜線部分（境界含む）．



よって求める D の面積は　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^2-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{\pi^2}{24}}$

(2)　$\dfrac{x}{2}+y=\theta$ とおき，$y=-\dfrac{x}{2}+\theta$　（傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線）が領域 D と共有点をもつときの y 切片 θ のとり得る値の範囲を求めると

$\left(0,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ を通るとき　θ は最大値 $\dfrac{\pi}{3}$　　$\left(\dfrac{\pi}{6},\ 0\right)$ を通るとき　θ は最小値 $\dfrac{\pi}{12}$ をとる

よって　$\dfrac{\pi}{12} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$

このとき

$$
\begin{aligned}
&3\sin^2\left(\frac{x}{2}+y\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}+y\right)+\sqrt{3}\sin(x+2y)+2\\
&=3\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sqrt{2}\sin 2\theta+2\\
&=3\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}+\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\sqrt{3}\sin 2\theta+2\\
&=\sqrt{3}\sin 2\theta-\cos 2\theta+4\\
&=2\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)+4
\end{aligned}
$$

$\dfrac{\pi}{12} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ より　$0 \leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{\pi}{2}$

よって　最大値 **6** $\left(\theta=\dfrac{\pi}{3}\ \text{つまり}\ x=0,\ y=\dfrac{\pi}{3}\right)$　最小値 **4** $\left(\theta=\dfrac{\pi}{12}\ \text{つまり}\ x=\dfrac{\pi}{6},\ y=0\right)$

2　[1]　$a>1$ のとき，x についての不等式 $2a^{3x+1}-a^{2x+2}-2a^{2x}+a^{x+1} \leqq 0$ を解け．

$a^x=X$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&2a^{3x+1}-a^{2x+2}-2a^{2x}+a^{x+1}\\
&=2aX^3-a^2X^2-2X^2+aX
\end{aligned}
$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

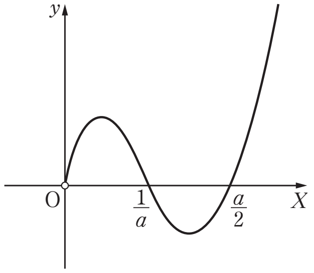
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$=2aX^3-(a^2+2)X^2+aX$

$=X\{2aX^2-(a^2+2)X+a\}=X(2X-a)(aX-1)$

これを $f(X)$ とすると，$f(X)=0$ となるのは　$X=0,\ \dfrac{a}{2},\ \dfrac{1}{a}$　$(a>1)$

$\dfrac{a}{2}\geqq\dfrac{1}{a}$ より　$a^2\geqq 2$　　$a\geqq\sqrt{2}$



よって　$a\geqq\sqrt{2}$ のとき　$y=f(X)$ のグラフは右図

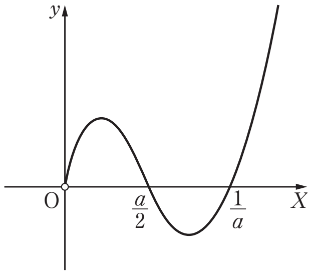
$\left(\dfrac{1}{a}=\dfrac{a}{2}\right.$ となることもある$\left.\right)$.

よって　$f(X)\leqq 0$ の解は　$\dfrac{1}{a}\leqq X\leqq\dfrac{a}{2}$

つまり　$a^{-1}\leqq a^x\leqq 2^{-1}\cdot a$

$a>1$ より　$-1\leqq x\leqq\log_a(2^{-1}\cdot a)=1-\log_a 2$

$a<\sqrt{2}$ のとき　$y=f(X)$ のグラフは右図.



よって　$f(X)\leqq 0$ の解は　$\dfrac{a}{2}\leqq X\leqq\dfrac{1}{a}$

つまり　$1-\log_a 2\leqq x\leqq -1$

以上より　$\boldsymbol{a\geqq\sqrt{2}}$ **のとき**　$\boldsymbol{-1\leqq x\leqq 1-\log_a 2}$

　　　　　$\boldsymbol{a<\sqrt{2}}$ **のとき**　$\boldsymbol{1-\log_a 2\leqq x\leqq -1}$

> 2 ［2］　$a>0$，$a\neq 1$ のとき　$\log_a\{1-(a-1)a^x\}\leqq 2x+1$ を満たす x の値の範囲を求めよ.

$\log_a\{1-(a-1)a^x\}\leqq 2x+1$　……①　より　$\log_a\{1-(a-1)a^x\}\leqq\log_a a^{2x+1}$

$a>1$ のとき　$1-(a-1)a^x\leqq a^{2x+1}$

$a(a^x)^2+(a-1)a^x-1\geqq 0$

$(a^x+1)(a\cdot a^x-1)\geqq 0$

$a^x>0$ より　$a\cdot a^x-1\geqq 0$　　$a^x\geqq\dfrac{1}{a}$　　$a^x\geqq a^{-1}$

$a>1$ より　$x\geqq -1$

また①の真数条件より　$1-(a-1)a^x>0$　　$(a-1)a^x<1$

$a>1$ より　$a^x<\dfrac{1}{a-1}$　　よって　$x<\log_a\dfrac{1}{a-1}$

ここで　$-1=\log_a\dfrac{1}{a}<\log_a\dfrac{1}{a-1}$　　$-1\leqq x<\log_a\dfrac{1}{a-1}$

$0<a<1$ のとき　$1-(a-1)a^x\geqq a^{2x+1}$　　$(a^x+1)(a\cdot a^x-1)\leqq 0$

$a^x>0$ より　$a^x\leqq\dfrac{1}{a}$　　$a^x\leqq a^{-1}$

$0<a<1$ より　$x\geqq -1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また①の真数条件より　$(a-1)a^x<1$

$0<a<1$，$a^x>0$ より　(左辺)<0　よって　すべての実数 x で成り立つ.

よって　$x\geqq -1$

以上より　**$0<a<1$ のとき　$x\geqq -1$**

$a>1$ のとき　$-1\leqq x<\log_a \dfrac{1}{a-1}$

3　x の方程式　$|\log_{10}x|=px+q$　……①（p，q は実数）が 3 つの相異なる正の解をもち，次の 2 つの条件を満たすとする.

（i）　3 つの解の比は $1:2:3$ である.

（ii）　3 つの解のうち最小のものは $\dfrac{1}{2}$ より大きく 1 より小さい.

このとき，$A=\log_{10}2$，$B=\log_{10}3$ とおき，p と q を A と B を用いて表せ.

(i)より①の異なる 3 つの正の解を α，2α，3α　とすると

(ii)より　$\dfrac{1}{2}<\alpha<1$

$$\begin{cases} -\log_{10}\alpha=p\alpha+q & \cdots\cdots② \\ \log_{10}2\alpha=2p\alpha+q & \cdots\cdots③ \\ \log_{10}3\alpha=3p\alpha+q & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

③より　$\log_{10}2+\log_{10}\alpha=2p\alpha+q$　……⑤　　④より　$\log_{10}3+\log_{10}\alpha=3p\alpha+q$　……⑥

②＋⑤より　$3p\alpha+2q=A$

②＋⑥より　$4p\alpha+2q=B$　　これらより　$p=\dfrac{-A+B}{\alpha}$，$q=\dfrac{4A-3B}{2}$

このとき②より　$-\log_{10}\alpha=\dfrac{-A+B}{\alpha}\cdot\alpha+\dfrac{4A-3B}{2}$

$$=A-\frac{1}{2}B$$

$$=\log_{10}2-\frac{1}{2}\log_{10}3$$

$\log_{10}\alpha=-\log_{10}2+\dfrac{1}{2}\log_{10}3=\log_{10}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　よって　$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって　**$p=\dfrac{2(-A+B)}{\sqrt{3}}$　　$q=\dfrac{4A-3B}{2}$**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 36 講　総合問題(4)

$0<a<1$ のとき　x についての方程式

$$\log_2(8ax-1)+\frac{\log_a(x-a)}{\log_a 2}+1=\log_2 2a \quad \cdots\cdots ①$$

の解 x を求める．①の真数条件より $x>\frac{1}{8a}$　かつ　$x>a$　……②　である．

$\frac{\log_a(x-a)}{\log_a 2}=\log_{\boxed{ア}}(x-\boxed{イ})$，　$\log_2 2a=\boxed{ウ}+\log_2\boxed{エ}$　より

①は　$x\{\boxed{オ}ax-(\boxed{カ}a^2+1)\}=0$　と変形できる．

②かつ $0<a<1$ より　$x\neq 0$　であるから　$x=\frac{\boxed{カ}a^2+1}{\boxed{オ}a}$　であり，これは②を満たす．

ここで　$x=\boxed{キ}+\frac{1}{\boxed{ク}a}$　と変形できることにより，x は $a=\frac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}$ のとき最小値 $\frac{1}{\sqrt{\boxed{サ}}}$ をとる．

①の真数条件より　$x>\frac{1}{8a}$　かつ　$x>a$　……②

$\frac{\log_a(x-a)}{\log_a 2}=\log_{\mathbf{2}}(x-\boldsymbol{a})$，$\log_2 2a=\mathbf{1}+\log_2\boldsymbol{a}$　より

①は　$\log_2(8ax-1)+\log_2(x-a)+1=1+\log_2 a$

$\log_2(8ax-1)(x-a)=\log_2 a$

$(8ax-1)(x-a)=a$

$8ax^2-(8a^2+1)x=0$

$x\{\mathbf{8}ax-(\mathbf{8}a^2+1)\}=0$

ここで，$x>a$，$0<a<1$　より　$x\neq 0$　であるから　$x=\frac{8a^2+1}{8a}$

また，$x=\boldsymbol{a}+\frac{1}{\mathbf{8}a}$　と変形でき，$a>0$，$\frac{1}{8a}>0$　であることより，相加平均と相乗平均の関係から　$a+\frac{1}{8a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{8a}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

等号成立は　$a=\frac{1}{8a}$　　$a^2=\frac{1}{8}$　　$0<a<1$ より

$a=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}$ のとき　x は最小値　$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{2}}}$ をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。